TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN HUỆ

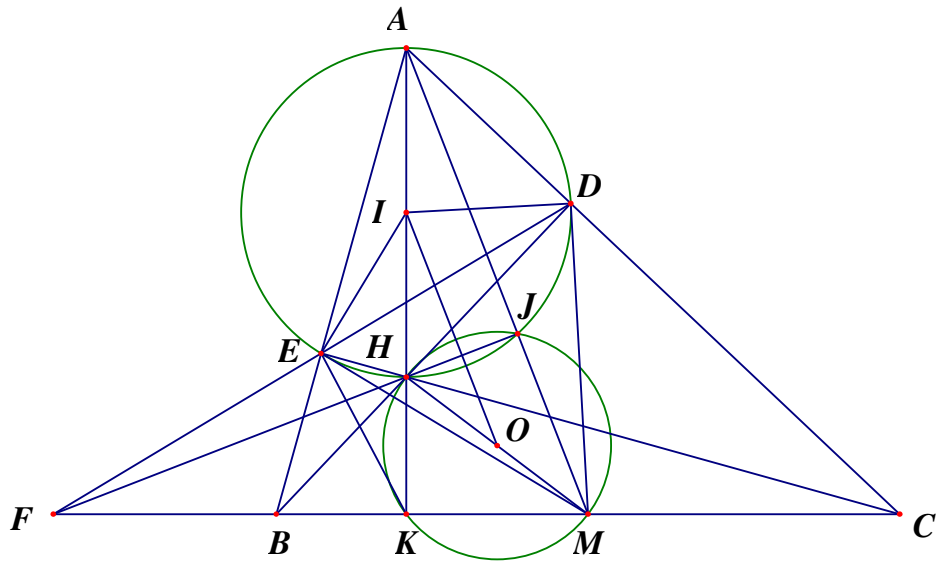
HƯỚNG DẪN CHẤM THI THỬ LẦN BA VÀO LỚP 10
NĂM HỌC 2016 – 2017

Môn thi: **TOÁN**
(Dành cho hệ chuyên Toán và chuyên Tin)

BÀI	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
I			***2,0***
	1	***Chứng minh rằng:*** $\left(a^3-b^3\right)\vdots 9$	***1,0***
		Vì a – b chia hết cho 3 nên a và b khi chia cho 3 có cùng số dư. Giả sử $a = 3k_1 + r$ và $b = 3k_2 + r$ $(0 \le r \le 2)$	*0,25*
		Ta có $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ $= (3k_1-3k_2)[(3k_1+r)^2+(3k_1+r)(3k_2+r)+(3k_2+r)^2]$ $= (3k_1-3k_2)[9k_1^2+9k_2^2+9k_1k_2+9r(k_1+k_2)+3r^2]$	*0,5*
		Vì $3k_1 - 3k_2$ chia hết cho 3 và $9k_1^2+9k_2^2+9k_1k_2+9r(k_1+k_2)+3r^2$ chia hết cho 3 suy ra $\left(a^3-b^3\right)\vdots 9$	*0,25*
	2	***Tính giá trị biểu thức:*** $P=a^3+b^3$	***1,0***
		Ta có: $\left(a+\sqrt{a^2+2016}\right)\left(b+\sqrt{b^2+2016}\right)=2016$ $\Leftrightarrow a+\sqrt{a^2+2016}=-b+\sqrt{b^2+2016}$ $\Leftrightarrow a+b+\sqrt{a^2+2016}-\sqrt{b^2+2016}=0$ $\Leftrightarrow (a+b)(1+\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+2016}+\sqrt{b^2+2016}})=0$	*0,25*
		Do: $\sqrt{a^2+2016}+\sqrt{b^2+2016}>\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\ge\lvert a-b\rvert \Rightarrow$ $\left\lvert\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+2016}+\sqrt{b^2+2016}}\right\rvert<1$ Suy ra: $1+\dfrac{a-b}{\sqrt{a^2+2016}+\sqrt{b^2+2016}}>0$. Vậy $a+b=0$	*0,5*
		Do đó: $P=a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=0$	*0,25*
II			***2,0***
	1	***Giải phương trình:*** $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4$.	***1,0***
		ĐK: $x\ge -3$	*0,25*
		Ta có $2\sqrt{x+3}=9x^2-x-4 \Leftrightarrow (1+\sqrt{x+3})^2=9x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+\sqrt{x+3}=3x\ (1)\\1+\sqrt{x+3}=-3x\ (2)\end{array}\right.$	*0,25*
		Giải (1) được nghiệm $x=1$	*0,25*
		Giải (2) được nghiệm $x=\dfrac{-5-\sqrt{97}}{18}$	*0,25*
	2	***Giải hệ phương trình:*** $\begin{cases}x(x-1)^2=3y-1\\y(y-1)^2=3x-1\end{cases}$	***1,0***

		Từ hệ phương trình trừ vế cho vế ta được: $x(x-1)^2 - y(y-1)^2 = 3y - 3x$ $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x - (y^3 - 2y^2 + y) + 3x - 3y = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - y^3 - 2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0$ $\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 2(x-y)(x+y) + 4(x-y) = 0$ $\Leftrightarrow (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 4) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0 \qquad (*) \end{array}\right.$	*0,25*
		Xét phương trình (*) ta có: $(*) \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 0$ $\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x + y = x - 2 = y - 2 = 0 (vn)$	*0,25*
		Thay $x = y$ vào phương trình ban đầu ta có: $x(x-1)^2 = 3x - 1$ $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x - 3x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 3x + 1) = 0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$	*0,25*
		Hệ phương trình có 3 cặp nghiệm: $(-1;-1), \left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$.	*0,25*
III			***2,0***
	1	***Tìm tất cả cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn*** $2^x + 5^y$ ***là số chính phương.***	***1,0***
		Đặt $2^x + 5^y = k^2$ **Trường hợp 1:** x, y cùng chẵn ta có: $k^2 = 2^x + 5^y \equiv 1 + 1 \pmod 3 \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow$ không thỏa mãn. **Trường hợp 2:** x, y cùng lẻ ta có: 2^x tận cùng là 2 hoặc 8; 5^y tận cùng là 5 $\Rightarrow 2^x + 5^y$ tận cùng là 3 hoặc 7 không là số chính phương.	*0,25*

		Trường hợp 3: x chẵn, y lẻ. Đặt x = 2m $\Rightarrow 2^{2m} + 5^y = k^2 \Leftrightarrow (k - 2^m)(k + 2^m) = 5^y$. Giả sử $\begin{cases} k - 2^m \vdots 5 \\ k + 2^m \vdots 5 \end{cases} \Rightarrow 2^{m+1}$ chia hết cho 5 vô lý. $\Rightarrow k - 2^m$ và $k + 2^m$ không cùng chia hết cho 5. $\Rightarrow \begin{cases} k + 2^m = 5^y \\ k - 2^m = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{m+1} = 5^y - 1$ +) Nếu m = 1 thì y = 1 ⇒ (x, y) = (2, 1) là một cặp nghiệm. +) Nếu $m \geq 2$ ta có $5^y - 1 = 2^{m+1} \vdots 8$. Vô lý vì y lẻ nên $5^y - 1 \equiv 4 \pmod 8$ ⇒ $m \geq 2$ thì phương trình không có nghiệm nguyên.	*0,25*
		Trường hợp 4: x lẻ, y chẵn. Đặt y = 2n ($n \geq 1$) $\Rightarrow 2^x + 5^{2n} = k^2 \Leftrightarrow (k - 5^n)(k + 5^n) = 2^x$.Vì k lẻ nên suy ra $\begin{cases} k - 5^n = 2^{x_1} \\ k + 5^n = 2^{x_2} \end{cases}$ ($x_1 + x_2 = x$, $1 \leq x_1 < x_2 < x$) $\Rightarrow k = 2^{x_2 - 1} + 2^{x_1 - 1}$. Nếu $x_1 > 1$ thì VP là số chẵn, VT lẻ nên vô lý. Suy ra $x_1 = 1$, $x_2 = x - 1$ Ta lại có $5^n = 2^{x-2} - 1 \Rightarrow x \geq 5$. Vì x lẻ nên $5^n = 2^{x-2} - 1 \equiv 1, 2 \pmod 5$ vô lý.	*0,25*
		Vậy ta tìm được một cặp nghiệm nguyên dương (x, y) = (2,1)	*0,25*
	2	***Chứng minh rằng:*** $\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3$	***1,0***
		Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương : $\frac{2-a+a}{2-a} + \frac{2-b+b}{2-b} + \frac{2-c+c}{2-c} \geq 6$ $\Leftrightarrow \frac{a}{2-a} + \frac{b}{2-b} + \frac{c}{2-c} \geq 3 \quad (*)$	*0,25*
		Từ giả thiết $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow 0 < a, b, c < \sqrt{3} < 2$. Ta có $VT(*) = \frac{a^4}{a^3(2-a)} + \frac{b^4}{b^3(2-b)} + \frac{c^4}{c^3(2-c)}$ $\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^3+b^3+c^3) - (a^4+b^4+c^4)}$ $= \frac{9}{2(a^3+b^3+c^3) - (a^4+b^4+c^4)}$	*0,25*
		Lại có: $a^4 + a^2 \geq 2a^3; b^4 + b^2 \geq 2b^3; c^4 + c^2 \geq 2c^3$. Suy ra: $2(a^3+b^3+c^3) - (a^4+b^4+c^4) \leq a^2 + b^2 + c^2 = 3$	*0,25*
		Vậy $VT(*) = \frac{9}{2(a^3+b^3+c^3) - (a^4+b^4+c^4)} \geq 3$ (điều cần chứng minh).	*0,25*
IV			***3,0***
	1	***Chứng minh rằng tứ giác EIDM nội tiếp.***	***1,5***

			
		Vì tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn (I; IH) nên ta có: $\widehat{EID} = 2\widehat{EAD}$ Vì tứ giác BEDC nội tiếp đường tròn tâm M nên ta có: $\widehat{EMD} = 2\widehat{EBD}$	*0,5*
		$\Rightarrow \widehat{EID} + \widehat{EMD} = 2\left(\widehat{EAD} + \widehat{EBD}\right) = 2\left(\widehat{BAD} + \widehat{ABD}\right) = 2.90^0 = 180^0$	*0,5*
		$\Rightarrow$ Tứ giác EIDM nội tiếp.	*0,5*
	2	***Chứng minh rằng FH $\perp$ AM.***	***1,5***
		Gọi K là giao điểm của AH và BC. Ta chứng minh được tứ giác EKMD nội tiếp suy ra FE.FD = FK.FM. Gọi O là trung điểm của HM. Ta có Δ HKM nội tiếp (O, OH).	*0,5*
		Vì FE.FD = FK.FM $\Rightarrow$ $\wp$(F, (I, IH)) = $\wp$(F, (O, OH)) $\Rightarrow$ F thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (I, IH) và (O, OH) (1) Mặt khác, H là một giao điểm của (I, IH) và (O, OH) $\Rightarrow$ H thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn (I, IH) và (O, OH) (2)	*0,5*
		Từ (1) và (2) suy ra đường thẳng FH là trục đẳng phương của hai đường tròn (I, IH) và (O, OH) $\Rightarrow$ FH $\perp$ OI. Mặt khác, OI là đường trung bình của Δ AHM $\Rightarrow$ OI // AM. $\Rightarrow$ FH $\perp$ AM (đpcm).	*0,5*
		Cách khác: Gọi J là giao điểm thứ hai của FH và (I, IH). Ta có: FE.FD = FH.FJ $\Rightarrow$ FH.FJ = FK.FM $\Rightarrow$ Tứ giác HJMK nội tiếp. $\Rightarrow$ J $\in$ (O, OH). $\Rightarrow$ (I, IH) $\cap$ (O, OH) = {H, J} $\Rightarrow$ HJ $\perp$ OI $\Rightarrow$ FH $\perp$ OI. Mặt khác, OI là đường trung bình của Δ AHM $\Rightarrow$ OI // AM. $\Rightarrow$ FH $\perp$ AM (đpcm).	
VI		***Số đo nhỏ nhất của cạnh thứ ba có thể đạt được là bao nhiêu?***	***1,0***

		Gọi độ dài ba cạnh của tam giác vuông ABC là: a, b, c. (a, b, c $\in N^*$) Ta có: a, b $\in$ P và b – a = 8 là số chẵn nên a, b đều lẻ (b > a). Giả sử cạnh thứ ba c là cạnh huyền. Theo định lý Pi-ta-go, ta có: $c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + (a + 8)^2 = 2a^2 + 16a + 64 = 2(a^2 + 8a + 32)$ Vì a lẻ nên $(a^2 + 8a + 32)$ lẻ do đó $2(a^2 + 8a + 32) \not\vdots\ 4$: điều này vô lý vì c^2 là số chính phương chẵn phải chia hết cho 4. Do đó cạnh c không thể là cạnh huyền.	*0,5*
		Suy ra b là cạnh huyền (vì b > a). Theo định lý Pi-ta-go ta có: $c^2 = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a) = 8(b + a) = 2^3.(a + b)$ Suy ra: $a + b = 2k^2$ ($k \in N^*$), vì b > 8 nên a + b > 8, do đó $k \geq 3$. Khi đó: $(a + b)_{min} = 2.3^2 = 18$, ta có: $\begin{cases} a+b=18 \\ b-a=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=13 \end{cases}$: thỏa điều kiện Từ đó: $c_{min} = 12$.	*0,5*

<u>Các chú ý khi chấm:</u>

1) Thí sinh phải lập luận đầy đủ mới cho điểm tối đa.

2) Thí sinh có cách giải đúng, khác với hướng dẫn thì giám khảo vẫn chấm và cho điểm theo số điểm quy định dành cho câu (hay ý) đó.

3) Vận dụng hướng dẫn chấm chi tiết đến 0,25 điểm nên không làm tròn điểm bài thi.